Cálculo Numérico
Prof. Helber Almeida

Ajuste de Curvas II

Aula - 10

Centro de Ciências e Tecnologia Agroalimentar

UFCG
Universidade Federal de Campina Grande
SUPRA OMNES LUX LUCES

Fórmula de Newton

Definição 4.7.1 *Sejam $x_0, x_1, ..., x_n$ pontos distintos num intervalo $[a, b]$ e seja $y = f(x)$ uma função que assume valores nos $x_k, k = 0, 1, ..., n$. Define-se* ***a diferença dividida*** *de ordem n da função $f(x)$ sobre os pontos $x_0, x_1, ..., x_n$ como sendo o termo $f[x_0, x_1, ..., x_n]$, onde*

$$f[x_k] = f(x_k) \quad e \quad f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_1, x_2, ..., x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \ k = 0, 1, ..., n.$$

Se $y = f(x)$ é uma função que toma valores em $x_0, x_1, ..., x_n$, definimos o polinômio interpolador $P_n(x)$, de grau menor ou igual a n, como sendo

$$P_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

$$+ ... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, ..., x_n] \quad (4.8)$$

Exemplo 1

Determine o polinômio de interpolação para f(x), usando a fórmula de Newton, no caso abaixo:

x	-1	0	3
f(x)	15	8	-1

Solução

- $f[x_0] = f(x_0) = 15$
- $f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{8-15}{0+1} = -7$
- $f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = \frac{-1-8}{3-0} = -3$
- $f\left[x_{0,}x_1, x_2\right] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{-3+7}{3+1} = 4$

Neste caso, teremos

$$P_2(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2],$$

- $P_2(x) = 15 + (x + 1)(-7) + (x + 1)(x - 0)(1)$
- $P_2(x) = x^2 - 6x + 8$

Método dos Mínimos Quadrados

- Caso Discreto
- Caso Contínuo

Caso Discreto

- Aproximar uma função (a partir dos pontos conhecidos) *f(x)*por
- $F(x) = a_1 g_1(x) + \cdots + a_n g_n(x)$ De forma que,

$$\sum_{k=1}^{m} d_k^2 = \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - F(x)]^2$$

- Seja a mínima possível

Caso 1 – Aproximação por uma reta

- $g_1(x) = x, g_2(x) = 1$
- $F(x) = a_1 x + a_2$

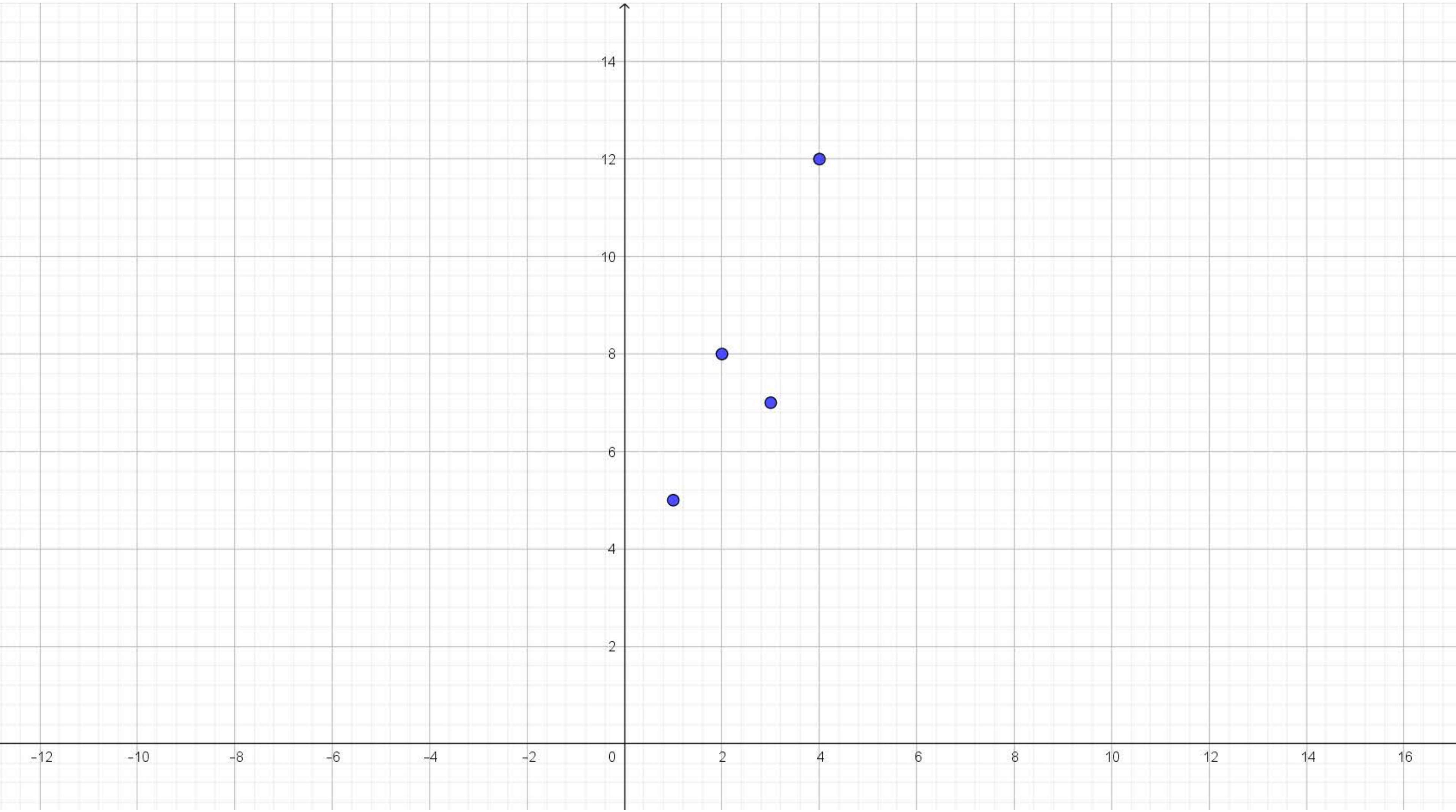
Exemplo

- Em uma determinada fábrica, a receita total anual de suas vendas durante os 4 anos de operação são dados por:

Vendas	1	2	3	4
Valores	5	8	7	12

- Determine a reta de regressão linear e use sua equação para estimar a receita após seis anos.

Graficamente



Processo

- $\sum_{k=1}^{4} x_k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
- $\sum_{k=1}^{4} y_k = 5 + 8 + 7 + 12 = 32$
- $\sum_{k=1}^{4} {x_k}^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$
- $\sum_{k=1}^{4} x_k * y_k = 5 + 16 + 21 + 48 = 90$

Agora, vamos montar o sistema

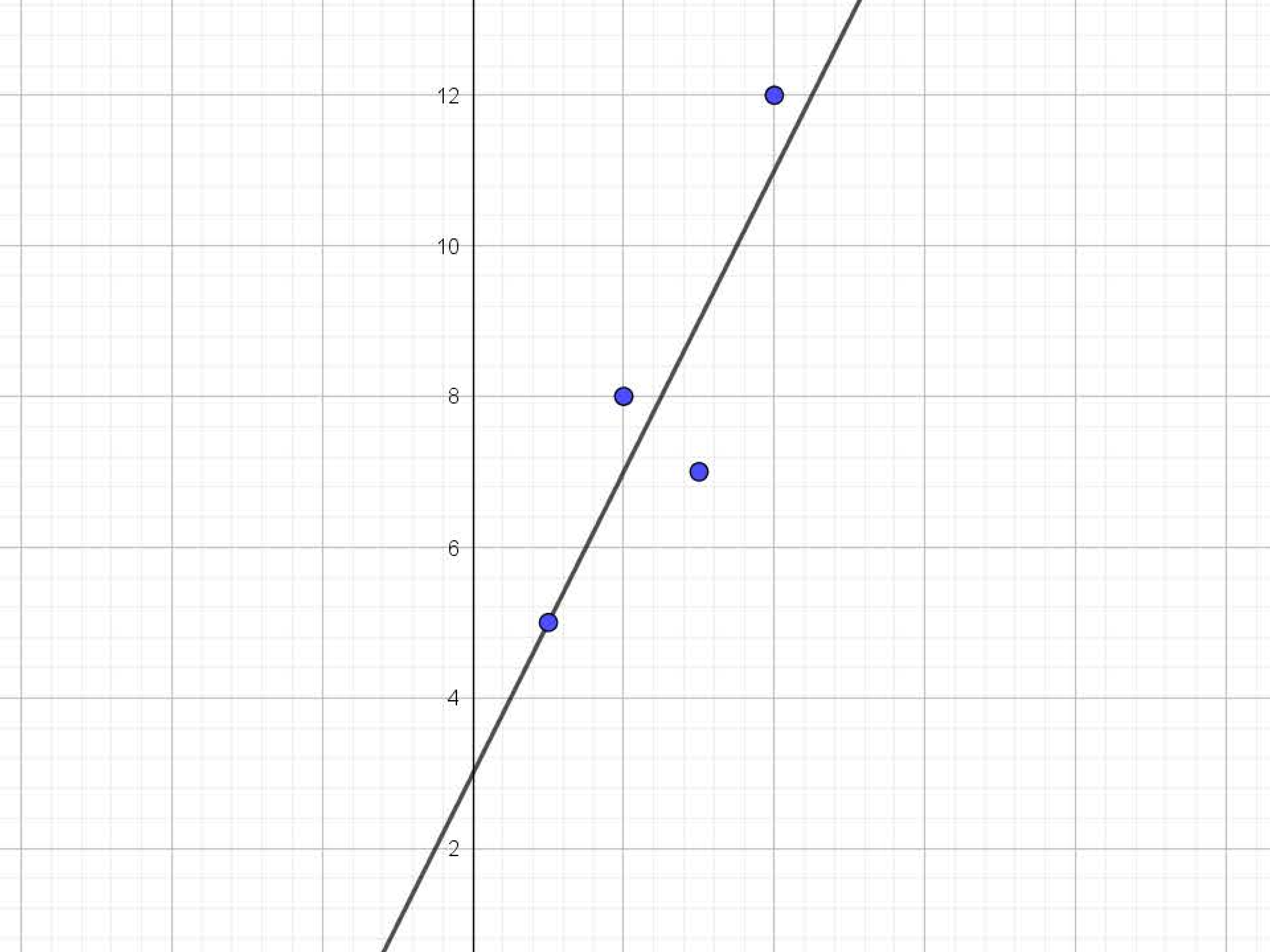
$$\begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{m} x_k^2\right)a + \left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)b & = \left(\sum_{k=1}^{m} x_k y_k\right) \\ \left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)a + (m)b & = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right), \end{cases}$$

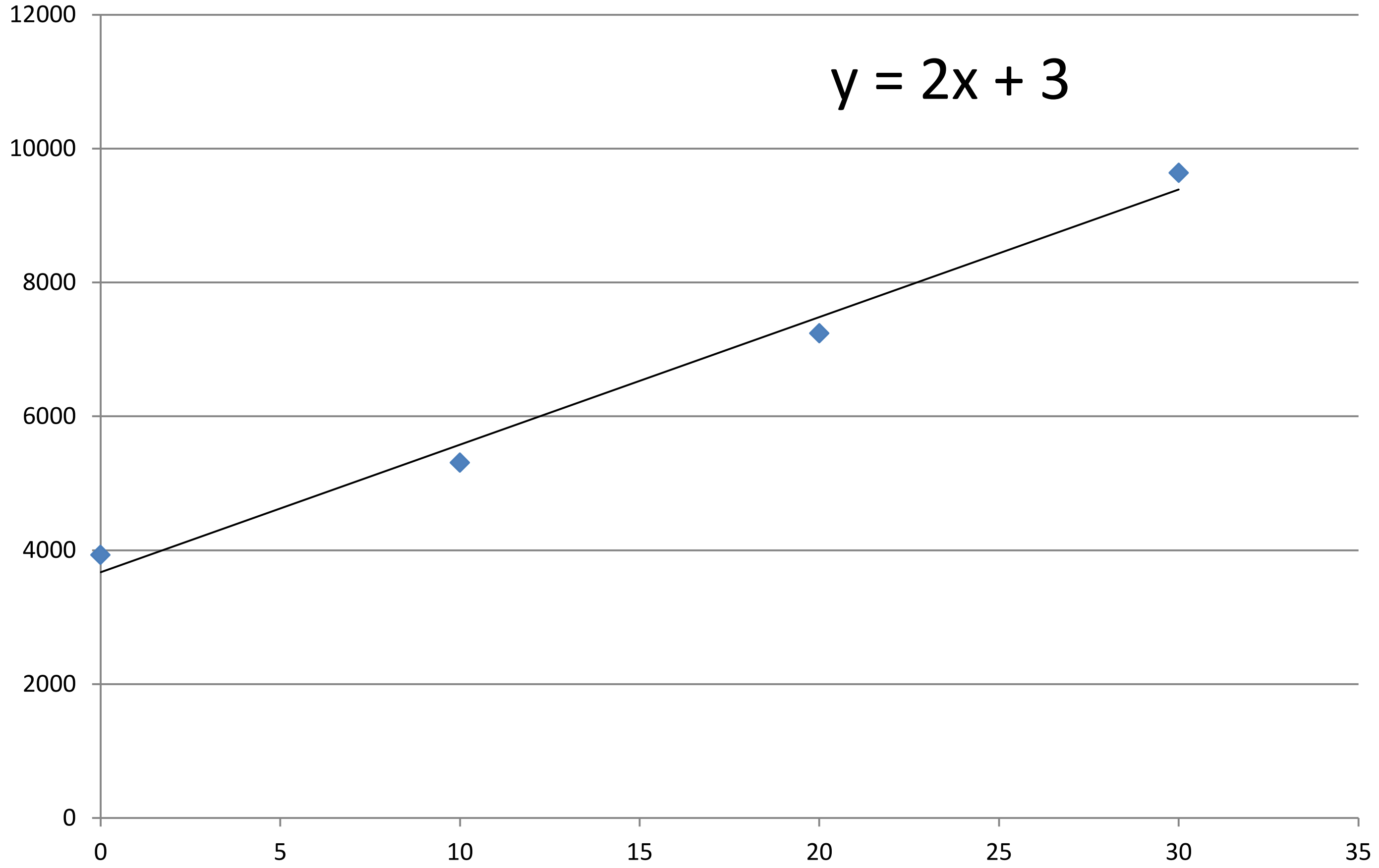
Número de Pontos

- $\begin{cases} 30a + 10b = 90 \\ 10a + 4b = 32 \end{cases} \quad \rightarrow$

- *a = 2 e b = 3.*

- *F(x) = 2x + 3*
- *F(6) = 15 milhões*


12
10
8
6
4
2


y = 2x + 3
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
0
5
10
15
20
25
30
35

Exemplo 2

- Na tabela abaixo temos representado a população (em milhões) americana no século XVIII. Utilize a ideia de regressão linear para estimar qual seria a população americana em 1990.

Ano	1790	1800	1810	1820	1830	1840
População	3929	5308	7240	9638	12866	17069

Processo

- $\sum_{k=1}^{6} x_k = 150$
- $\sum_{k=1}^{6} y_k = 56.050$
- $\sum_{k=1}^{6} {x_k}^2 = 5.500$
- $\sum_{k=1}^{6} x_k * y_k = 1.855.110$

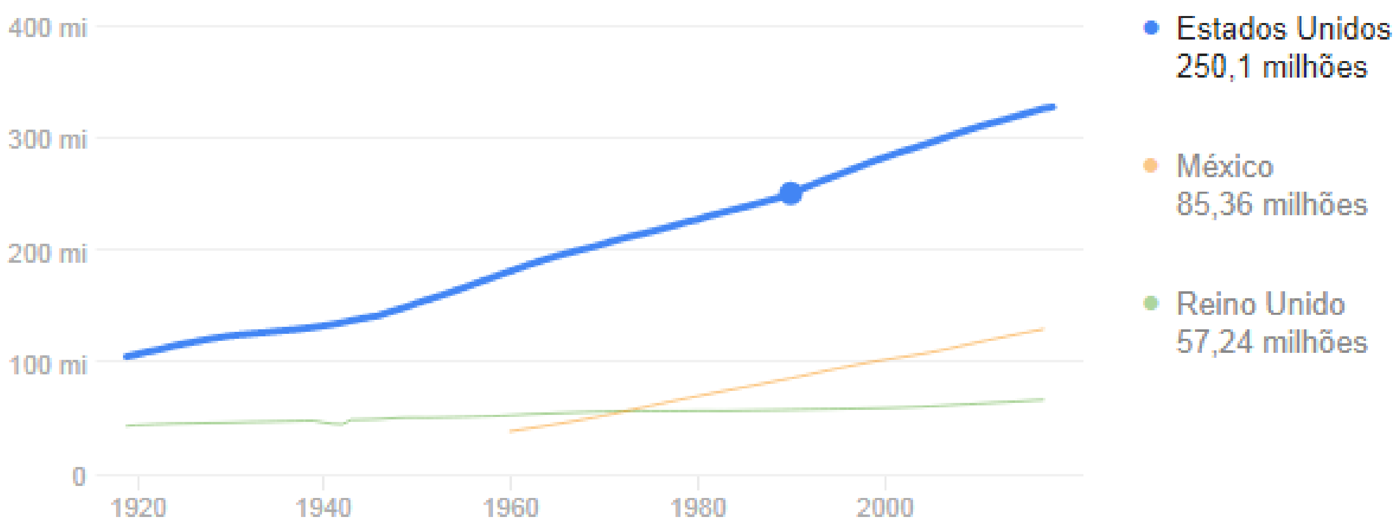
- $\begin{cases} 5.500a + 150b = 1.855.110 \\ 150a + 6b = 56.050 \end{cases} \rightarrow$

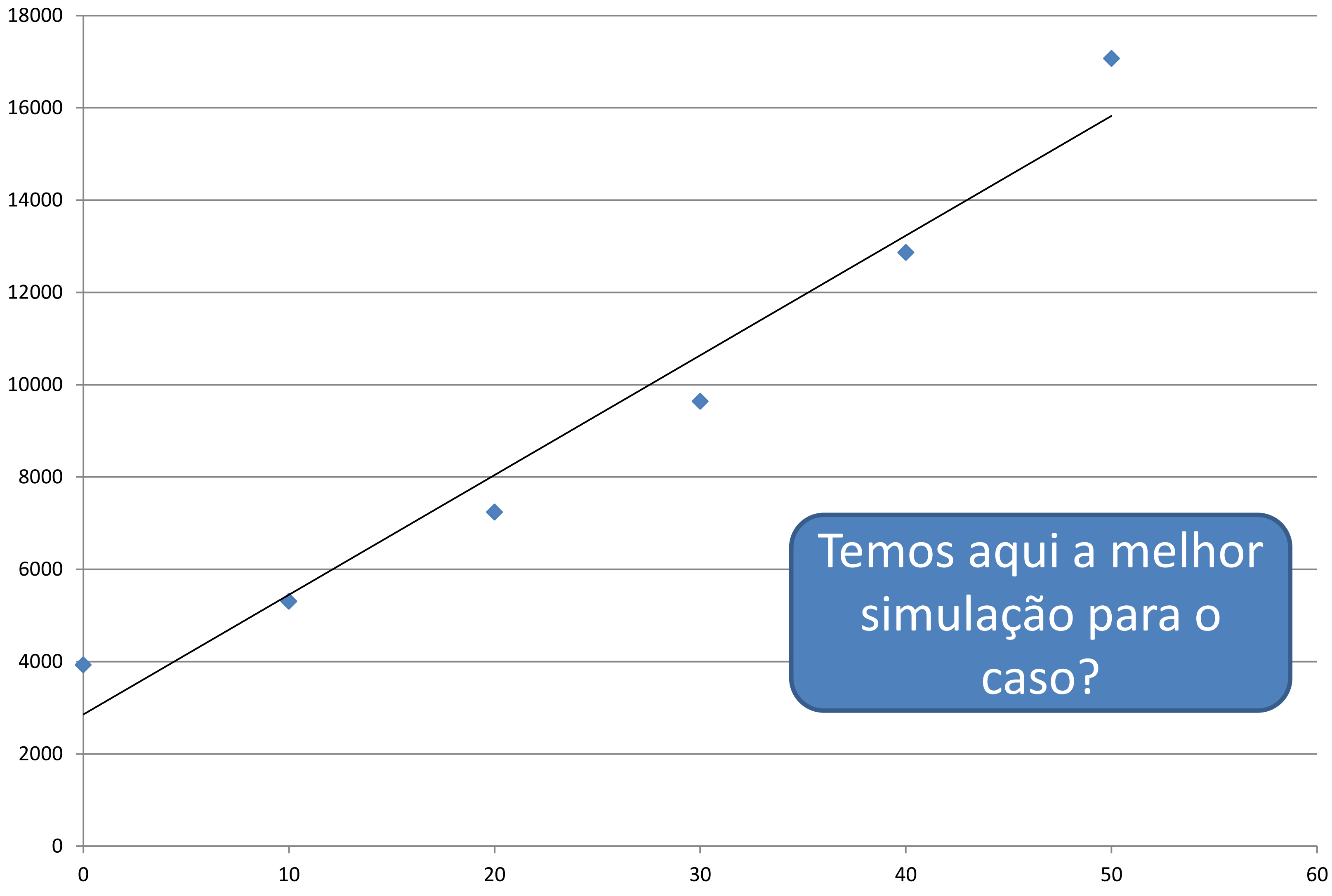
- *a = 0,25935 e b = 2,858.*

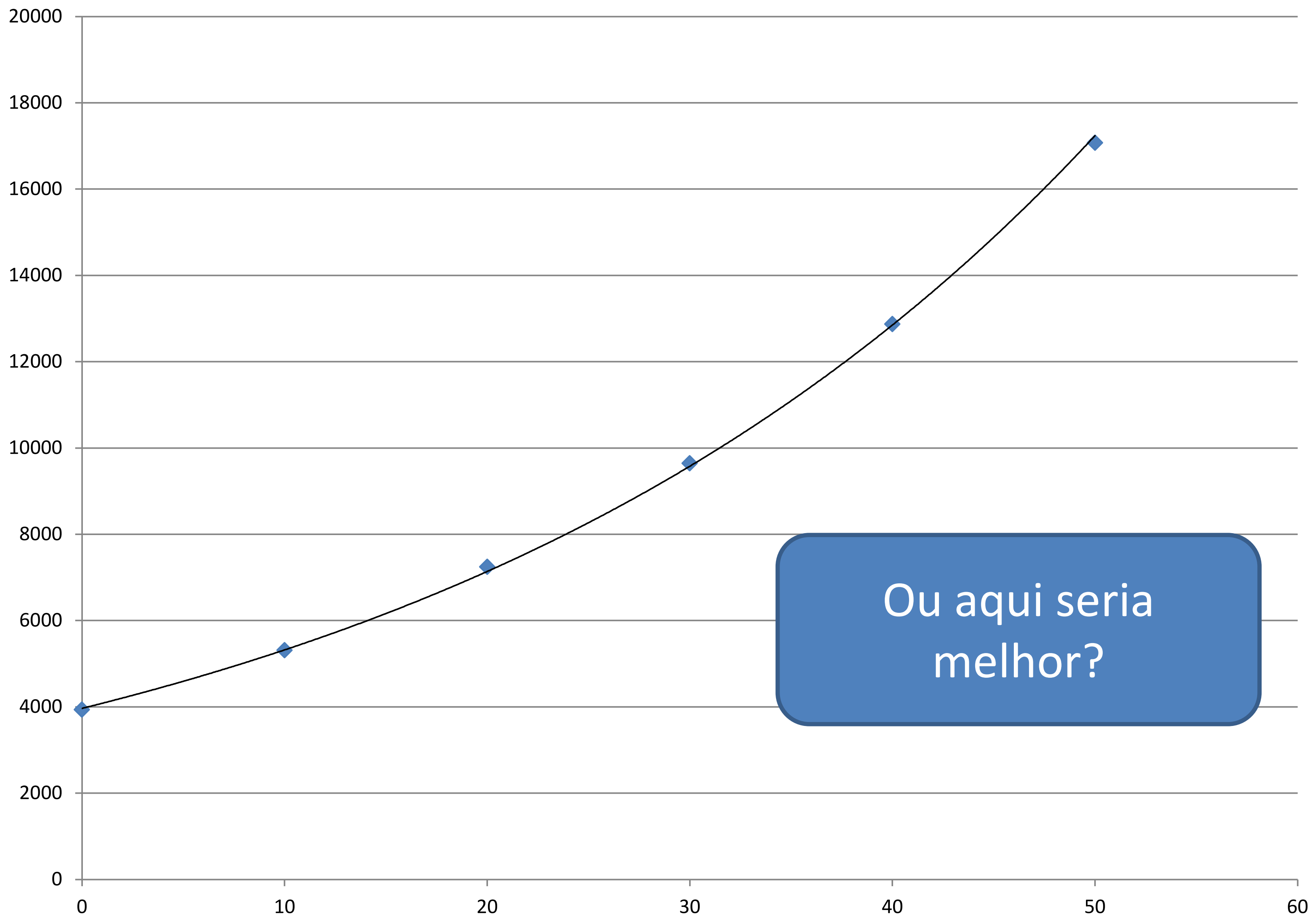
- *F(x) = 0,25935x + 2,858*
- *F(200) = 55 milhões*

Estados Unidos / População (1990)

250,1 milhões (1990)




18000
16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
0
10
20
30
40
50
60
Temos aqui a melhor simulação para o caso?


20000
18000
16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
0
10
20
30
40
50
60
Ou aqui seria melhor?

Não esquecer, nem sempre podemos utilizar modelos diferentes para situações iguais