Cálculo Numérico
Prof. Helber Almeida

Método do Ponto Fixo

Aula - 04

Centro de Ciências e Tecnologia Agroalimentar

Universidade Federal de Campina Grande

Problema?

Dada uma função f, contínua num intervalo $[a, b]$ no qual existe uma única raíz de f, então podemos determinar a raíz da equação

$$f(x) = 0, \tag{2.2}$$

resolvendo a equação

$$x = g(x), \tag{2.3}$$

Cálculo Numérico – Ponto Fixo

- Método do *Ponto Fixo* (*MPF*)

Implicação de tal procedimento:

Problema de determinação de um zero de ***f(x)***

Problema de determinação de um ponto fixo de ***g(x)***

Função de iteração

Cálculo Numérico – Ponto Fixo

- Método do *Ponto Fixo* (*MPF*)

  Forma geral das funções de iteração:

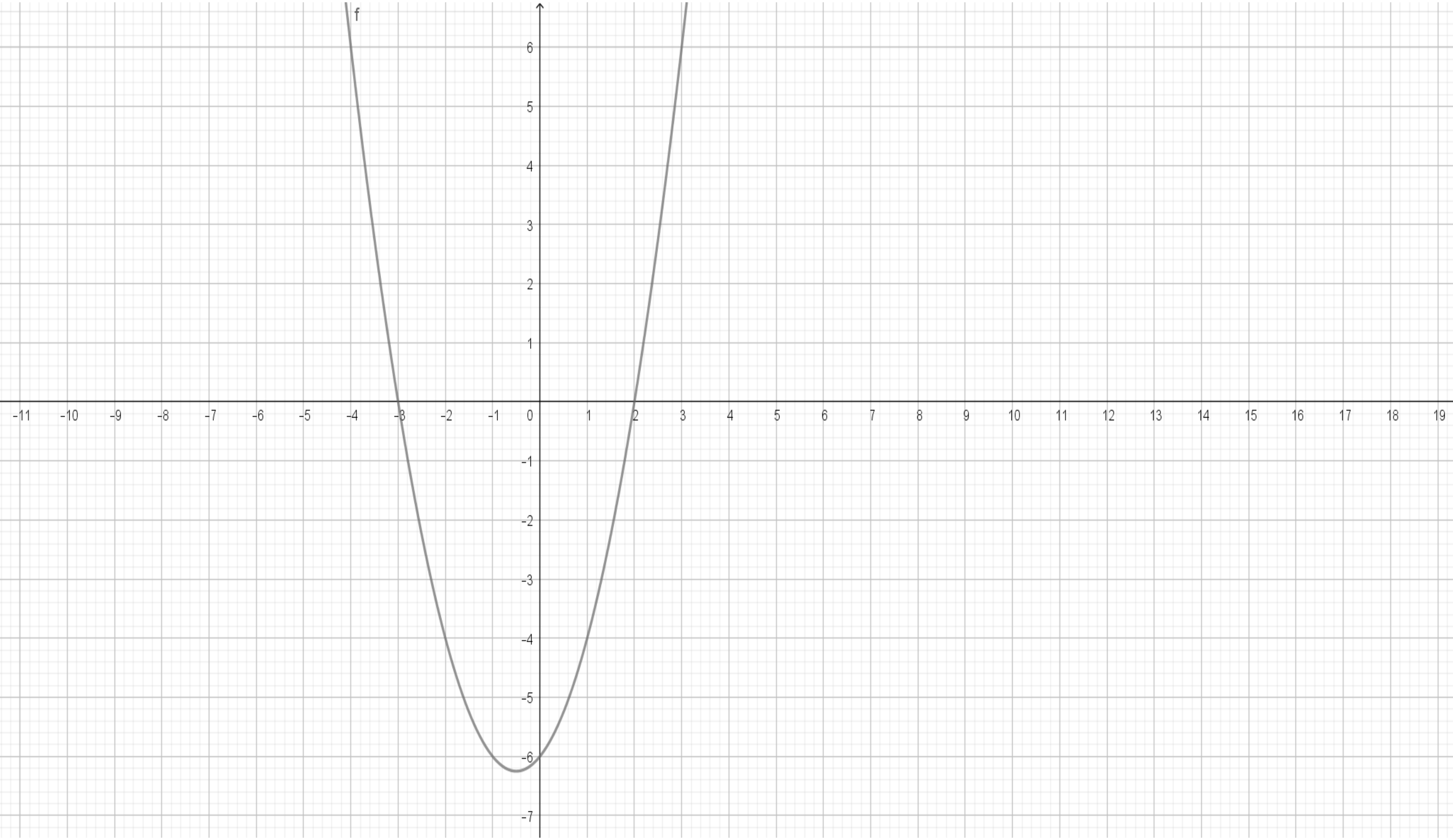
$$g(x) = x + A(x)f(x)$$

  com $A(\xi) \neq 0$ em ξ, *ponto fixo* de $g(x)$.

- Interpretação Gráfica

  – $x = g(x)$ tem como raiz a abcissa do ponto de intersecção da reta $r(x) = x$ e da curva $g(x)$.

$f(x) = x^2 + x - 6$


f
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

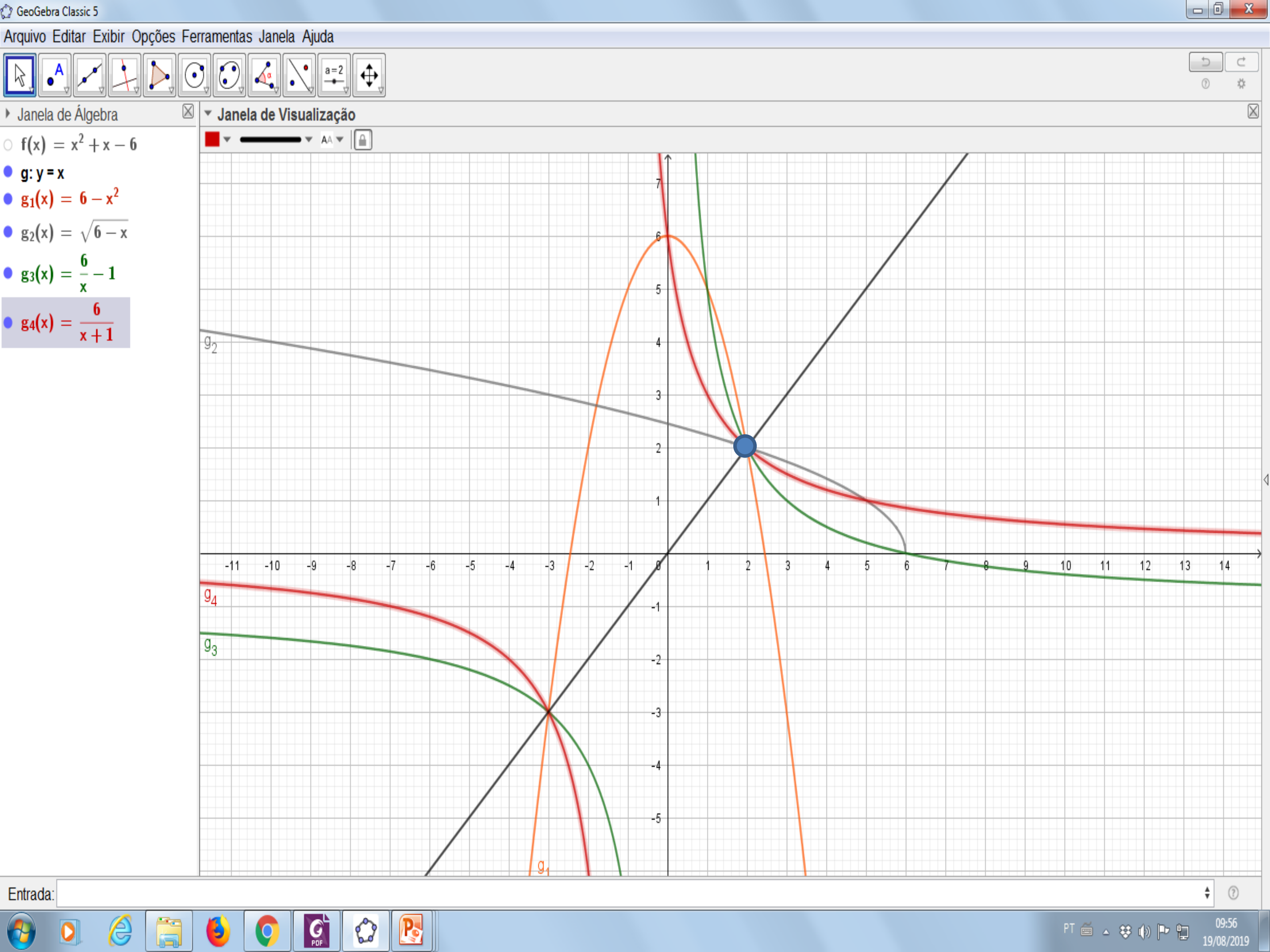
Funções de iteração possíveis:

$g_1(x) = 6 - x^2$

$g_2(x) = \pm\sqrt{6 - x}$

$g_3(x) = \frac{6}{x} - 1$

$g_4(x) = 6/(x + 1)$


GeoGebra Classic 5
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Janela de Álgebra
$f(x) = x^2 + x - 6$
$g: y = x$
$g_1(x) = 6 - x^2$
$g_2(x) = \sqrt{6 - x}$
$g_3(x) = \frac{6}{x} - 1$
$g_4(x) = \frac{6}{x + 1}$
Janela de Visualização
Entrada:
09:56
19/08/2019

Qual a melhor escolha?

Teorema 2.3.1 *Seja α uma raíz de $f(x) = 0$ que satisfaz a equação $x = g(x)$ e seja $I = (\alpha - h, \alpha + h)$ um intervalo aberto centrado em α. Então a seqüência x_k gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ convergirá para α se as seguintes condições são satisfeitas:*

- *$g(x)$ e $g'(x)$ são contínuas em I;*
- *$x_0 \in I$;*
- *Se existe $M > 0$ tal que $|g'(x)| \leq M < 1, \quad \forall x \in I$.*

No exemplo anterior

- $|g'_1(x)| < 1 \Leftrightarrow |-2x| < 1 \Leftrightarrow -½ < x < ½$
- Não existe um intervalo I centrado em $\xi_2=2$, tal que $|g'(x)| < 1$, $\forall x \in I \Rightarrow g_1(x)$ não satisfaz a condição 2 do Teorema 2 com relação a $\xi_2=2$.

- $g_2(x) = \sqrt{6 - x}$ e $g'_2(x) = -(1/2\sqrt{6-x})$

  ⇨ $g_2(x)$ é contínua em $S = \{x \in R \mid x \leq 6\}$

  ⇨ $g'_2(x)$ é contínua em $S' = \{x \in R \mid x < 6\}$

- $|g'_2(x)| < 1 \Leftrightarrow |1/2\sqrt{6-x}| < 1 \Leftrightarrow x < 5{,}75$

- **É possível obter um intervalo I centrado em $\xi_2=2$, tal que todas as condições do Teorema 2 sejam satisfeitas.**

O método

O **método de iteração linear** ou **método do ponto fixo** é usado para determinar uma raíz aproximada da raíz de f no intervalo $[a, b]$. Esse processo é feito da seguinte forma: Tomamos, inicialmente, x_0 como a aproximação da raíz α de f no intervalo $[a, b]$ e depois obtemos as aproximações sucessivas x_k, para a solução procurada α, usando o processo iterativo definido por

$$x_{k+1} = g(x_k),\ k = 0, 1, 2, ...$$

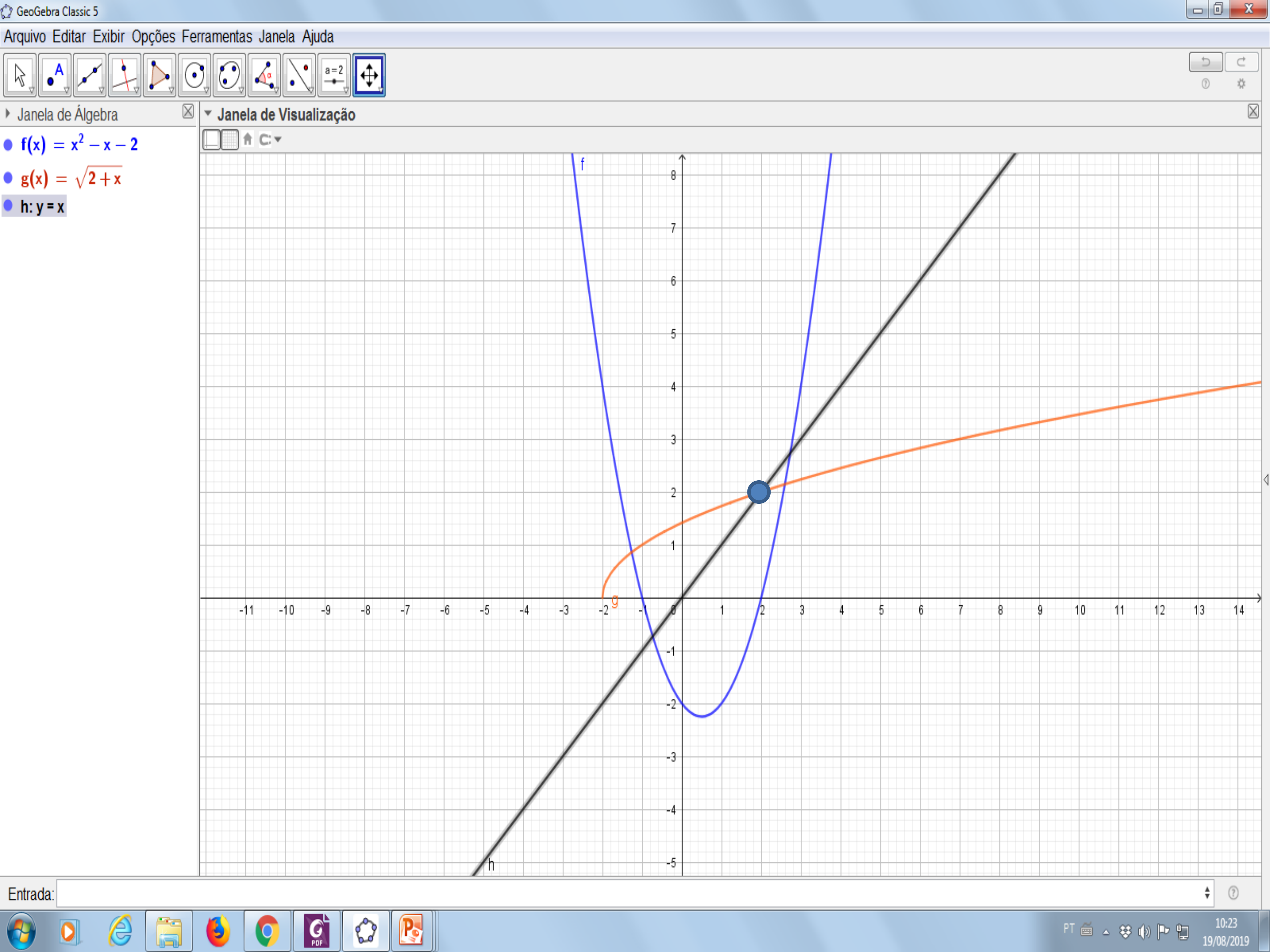
O erro que usaremos para o método de iteração linear é dado por

$$e_{k+1} = |x_{k+1} - x_k|,\ \ k = 0, 1, ...$$

O processo deve parar quando $e_k < \epsilon$, onde ϵ é a tolerância.

Exemplo 1:

- *Use o método de iteração linear para determinar uma raız aproximada de* $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$, *com* $x_0 = 2.5$ *e* $g(x) = \sqrt{2 + x}$, *sabendo-se que a raiz* α *está no intervalo [0,3].*


GeoGebra Classic 5
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Janela de Álgebra
$f(x) = x^2 - x - 2$
$g(x) = \sqrt{2 + x}$
h: y = x
Janela de Visualização
f
g
h
Entrada:
PT
10:23
19/08/2019

Solução

- Primeiro, verificamos se o teorema

a

:

Ambas são contínuas em [0,3]

- $g(x) = \sqrt{2+x} \rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$
- $|g'(x)| < 1 \leftrightarrow \left|\frac{1}{2\sqrt{2+x}}\right| < 1 \leftrightarrow x > -\frac{7}{4} = -1{,}75$

Iterações

$$
\begin{aligned}
x_1 &= g(x_0) = \sqrt{2+2.5} = \sqrt{4.5} = 2.1213203 \\
x_2 &= g(x_1) = \sqrt{2+2.1213203} = \sqrt{4.1213203} = 2.0301035 \\
x_3 &= g(x_2) = \sqrt{2+2.0301035} = \sqrt{4.0301035} = 2.0075118 \\
x_4 &= g(x_3) = \sqrt{2+2.0075118} = \sqrt{4.0075118} = 2.0018771 \\
x_5 &= g(x_4) = \sqrt{2+2.0018771} = \sqrt{2.0018771} = 2.0004692 \\
x_6 &= g(x_5) = \sqrt{2+2.0004692} = \sqrt{4.0004692} = 2.0001173 \\
x_7 &= g(x_6) = \sqrt{2+2.0001173} = \sqrt{4.0001173} = 2.0000293 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

- A sequências das possíveis soluções tende a 2.

Exemplo 2

- Para a função $f(x) = e^x - 4x$ encontre uma no intervalo [0, 1] com uma tolerância de 0,002.

- Primeiramente, perceba que temos duas opções para escolha da função g.

- $g_1(x) = \frac{e^x}{4}$ ou $g_2(x) = \ln(4x)$

Analisando o teorema para $g_1(x) = \frac{e^x}{4}$

- Claramente a função e sua derivada são contínuas;
- $\left|g_1{}'(x) = \frac{e^x}{4}\right| < 1 \leftrightarrow x < ln4 \leftrightarrow x < 1{,}38.$
- Vamos escolher um ponto de partida: $x_0 = 0$.

Iterações

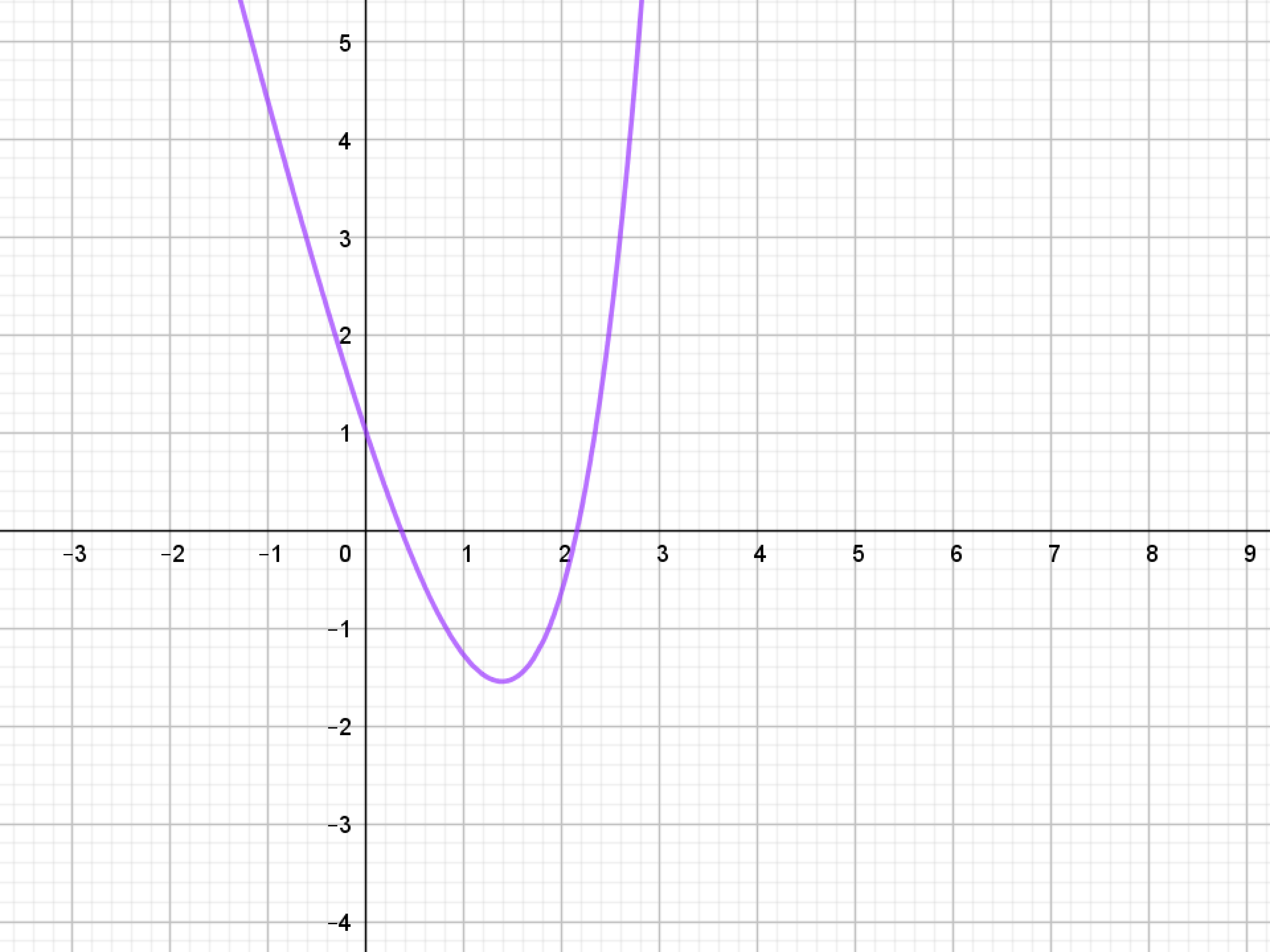
x_k	$g(x_k)$	**teste**
0	0.25	$\|0.25 - 0\| = 0.25 > 0.002$
0.25	0.3210	$\|0.3210 – 0.25\| = 0.071 > 0.002$
0.3210	0.3446	$\|0.3446 – 0.3210\| = 0.0236 > 0.002$
0.3446	0.3529	$\|0.3529 – 0.3446\| = 0.0083 > 0.002$
0.3529	0.3558	$\|0.3558 – 0.3529\| = 0.0029 > 0.002$
0.3558	0.3568	$\|0.3568 – 0.3558\| = 0.001 < 1$

Portanto tem-se uma aproximação para a raiz = 0.3568

Repita o exemplo para $g_2(x) = \ln(4x)$

Verificando no Geogebra

- No GeoGebra, escreva a função $f(x) = e^x - 4x$;
- Perceba que o gráfico é do tipo:


5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Agora escreva o comando

- Raiz(f,0,1) e aperte “Enter”.