Cálculo Numérico
Prof. Helber Almeida

Ajuste de Curvas IV

Aula - 12

Centro de Ciências e Tecnologia Agroalimentar

UFCG
Universidade Federal de Campina Grande
SUPRA OMNES LUX LUCES

MMQ – Caso Contínuo

- Queremos aproximar uma função *f(x)*, contínua em um intervalo [*a*, *b*], por uma função polinomial ou trigonométrica.

- $F(x) = a_1 g_1(x) + \cdots + a_n g_n(x)$

- De modo que o erro $\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$ seja mínimo.

Neste caso

$$\begin{cases} a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}a_3 + \cdots + a_{1n}a_n & = b_1 \\ a_{21}a_1 + a_{22}a_2 + a_{23}a_3 + \cdots + a_{2n}a_n & = b_2 \\ a_{31}a_1 + a_{32}a_2 + a_{33}a_3 + \cdots + a_{3n}a_n & = b_3 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}a_1 + a_{n2}a_2 + a_{n3}a_3 + \cdots + a_{nn}a_n & = b_n \end{cases}$$

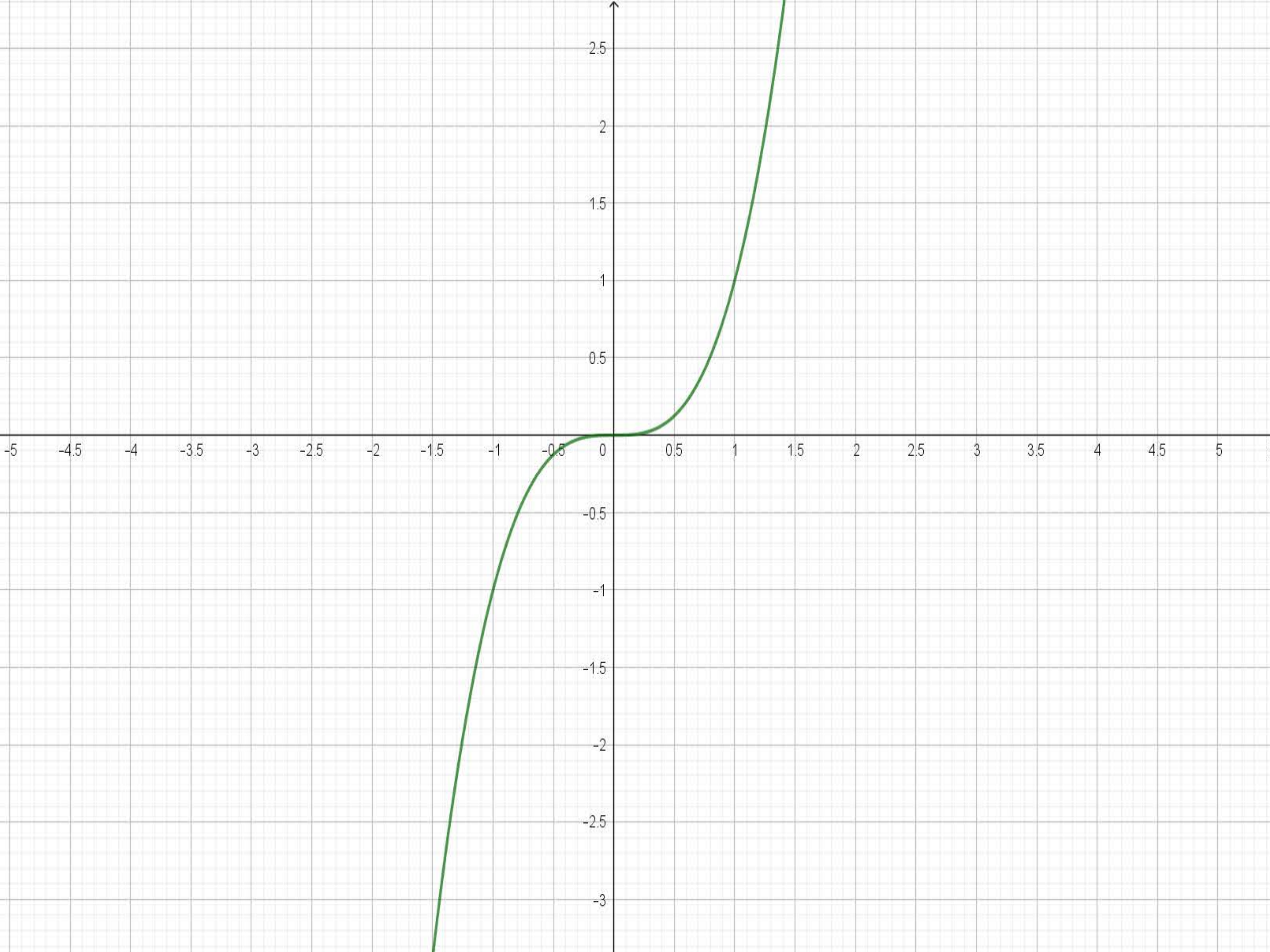
- $a_{ij} = a_{ji} = \int_a^b g_i(x)g_j(x)dx,\ i,j = 1,2,\ldots,n$
- $b_i = \int_a^b f(x)g_i(x)dx,\ i = 1,2,\ldots,n$

Caso Polinomial (Reta)

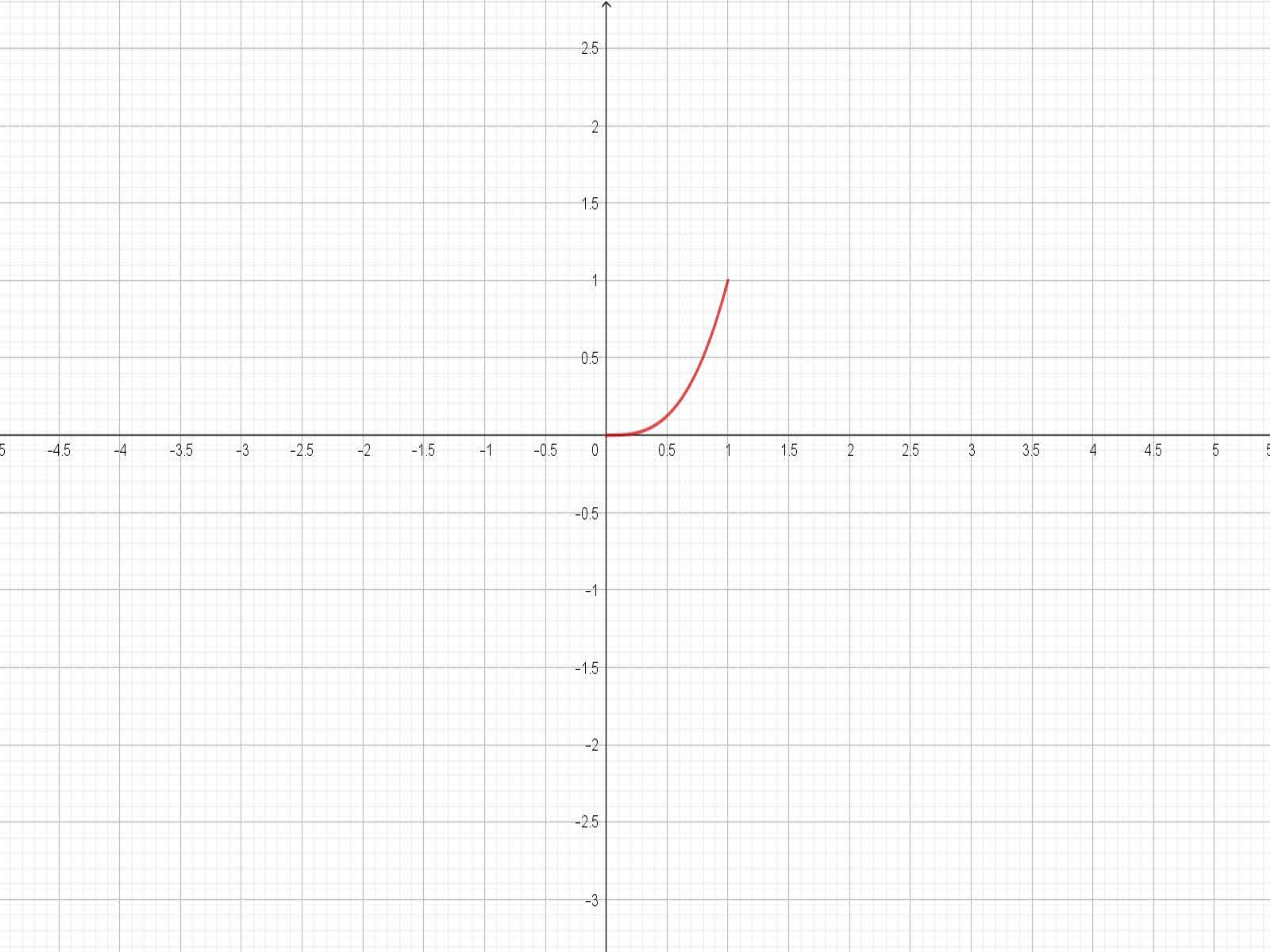
- $F(x) = ax + b$ e $\begin{cases} a_{11}a + a_{12}b = b_1 \\ a_{21}a + a_{22}b = b_2 \end{cases}$
- $a_{11} = \int_a^b g_1(x)g_1(x)dx = \int_a^b x^2dx$
- $a_{12} = a_{21} = \int_a^b g_1(x)g_2(x)dx = \int_a^b xdx$
- $a_{22} = \int_a^b g_2(x)g_2(x)dx = \int_a^b 1dx$
- $b_1 = \int_a^b f(x)g_1(x)dx = \int_a^b xf(x)dx$
- $b_2 = \int_a^b f(x)g_2(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Exemplo

- Aproximar a função $f(x) = x^3$ no intervalo [0, 1] por uma reta.



2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-5
-4.5
-4
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5



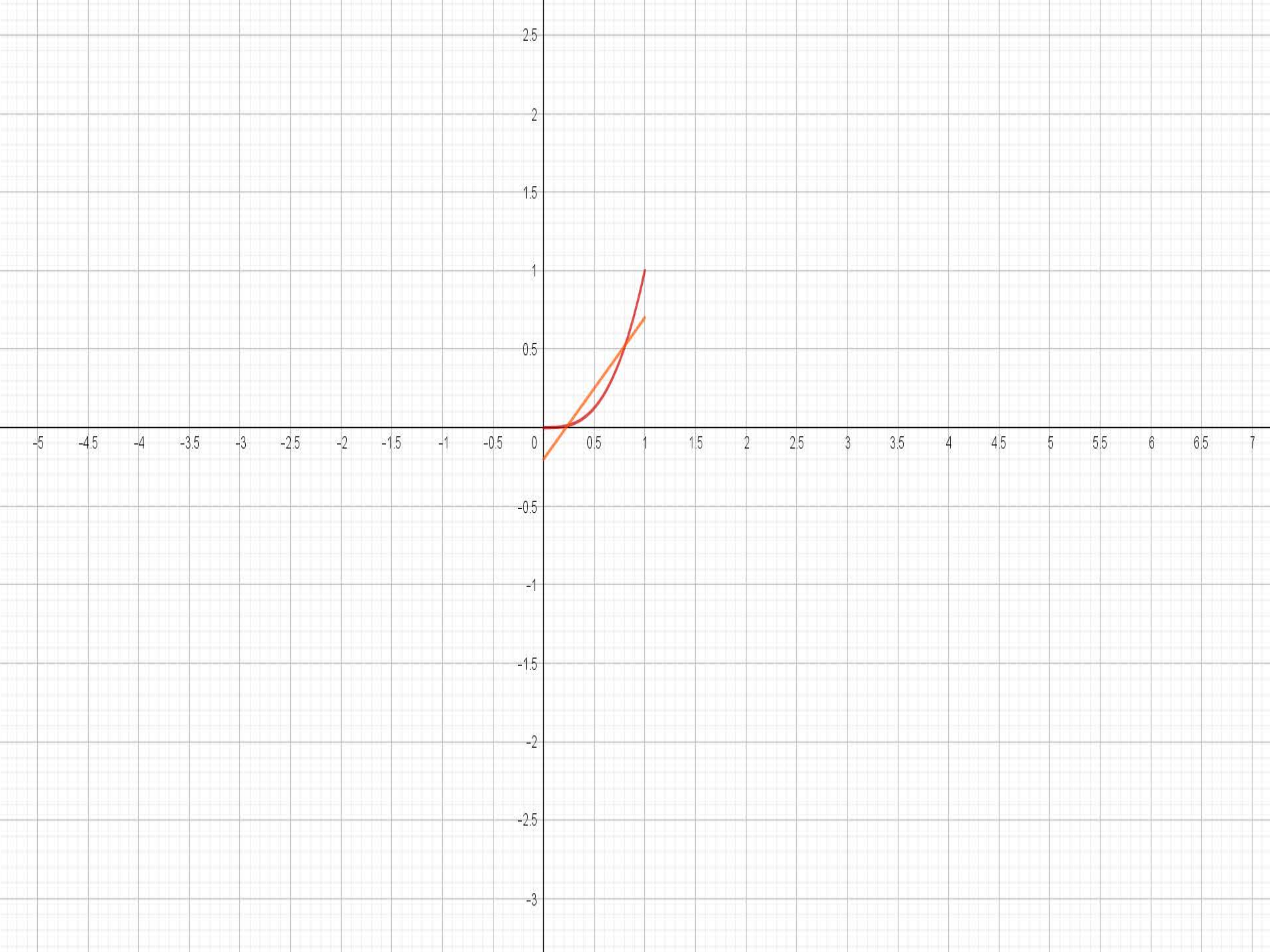
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-4.5
-4
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Neste caso

- $a_{11} = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$
- $a_{12} = a_{21} = \int_0^1 x dx = 1/2$
- $a_{22} = 1$
- $b_1 = \int_0^1 x^3 * x dx = 1/5$
- $b_2 = \int_1^0 x^3 * 1 = 1/4$

De onde temos o sistema

- $\begin{cases} a_{11}a + a_{12}b = b_1 \\ a_{21}a + a_{22}b = b_2 \end{cases}$ = $\begin{cases} 1/3a + 1/2b = 1/5 \\ 1/2a + b = 1/4 \end{cases}$
- $\begin{cases} 10a + 15b = 6 \\ 2a + 4b = 1 \end{cases}$ *a = 9/10* *b = -1/5*
- *Logo,* $F(x) = \frac{9}{10}x - \frac{1}{5}$


2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-5
-4.5
-4
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7

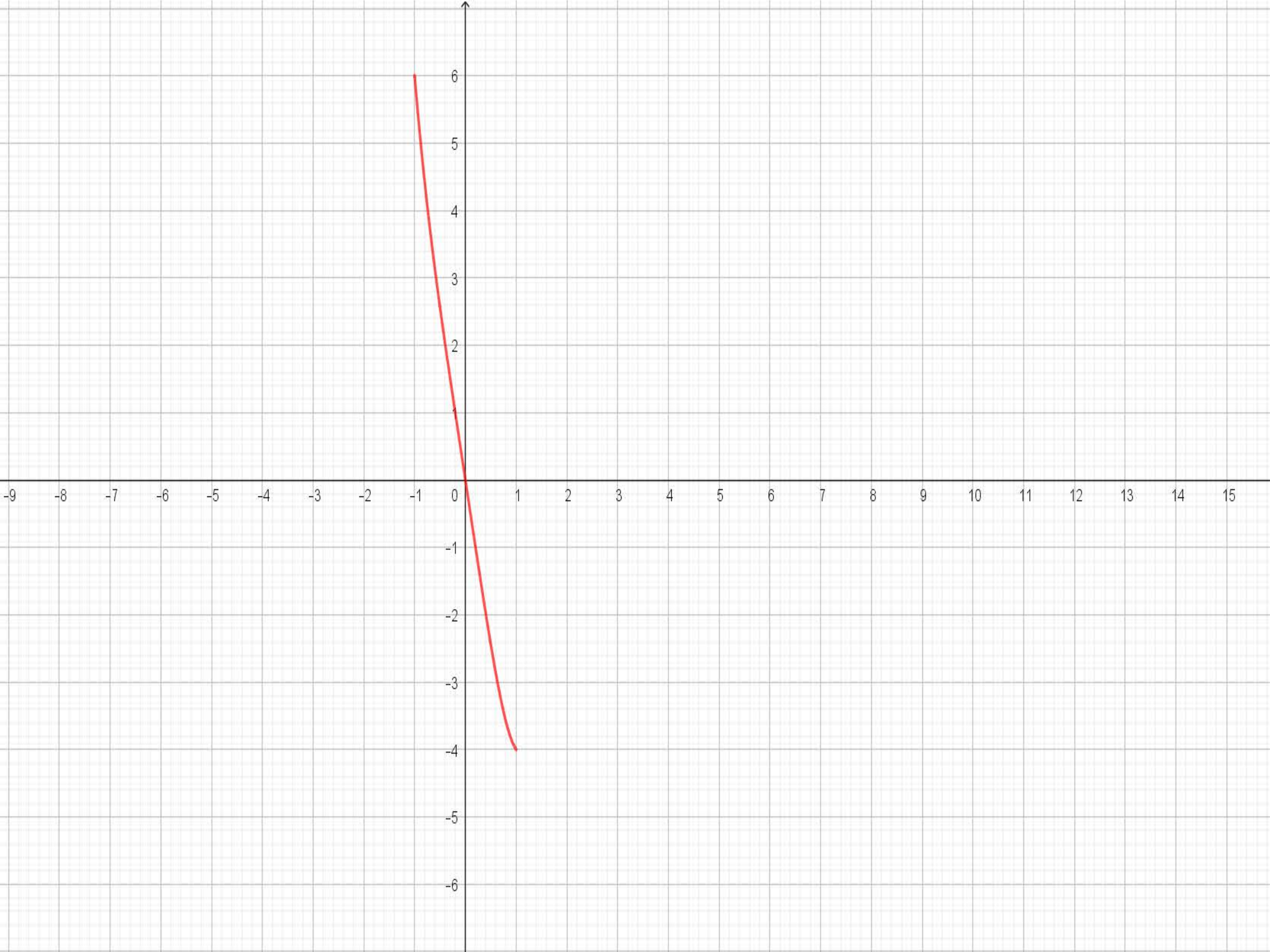
Aproximação Função Polinomial Grau 2

$$\begin{cases} a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c & = b_1 \\ a_{21}a + a_{22}b + a_{23}c & = b_2 \\ a_{31}a + a_{32}b + a_{33}c & = b_3 \end{cases}$$

$n = 3, g_1(x) = x^2,\ g_2(x) = x,\ g_3(x) = 1,\ a_1 = a,\ a_2 = b$ e $a_3 = c,$

Exemplo

- Aproximar a função $f(x) = x^4 - 5x$, por uma função do segundo grau, no intervalo [-1, 1].



6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Neste caso

$$a_{11} = \frac{1}{5}[1^5 - (-1)^5] = \frac{2}{5},$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{1}{4}[1^4 - (-1)^4] = 0,$$

$$a_{13} = a_{31} = a_{22} = \frac{1}{3}[1^3 - (-1)^3] = \frac{2}{3},$$

$$a_{23} = a_{32} = \frac{1}{2}[1^2 - (-1)^2] = 0,$$

$$a_{33} = (1 - (-1)) = 2,$$

$$b_1 = \int_{-1}^{1} x^2(x^4 - 5x)dx = \int_{-1}^{1} (x^6 - 5x^3)dx = \left(\frac{x^7}{7} - 5\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{7} - \frac{5}{4} + \frac{1}{7} + \frac{5}{4} = \frac{2}{7},$$

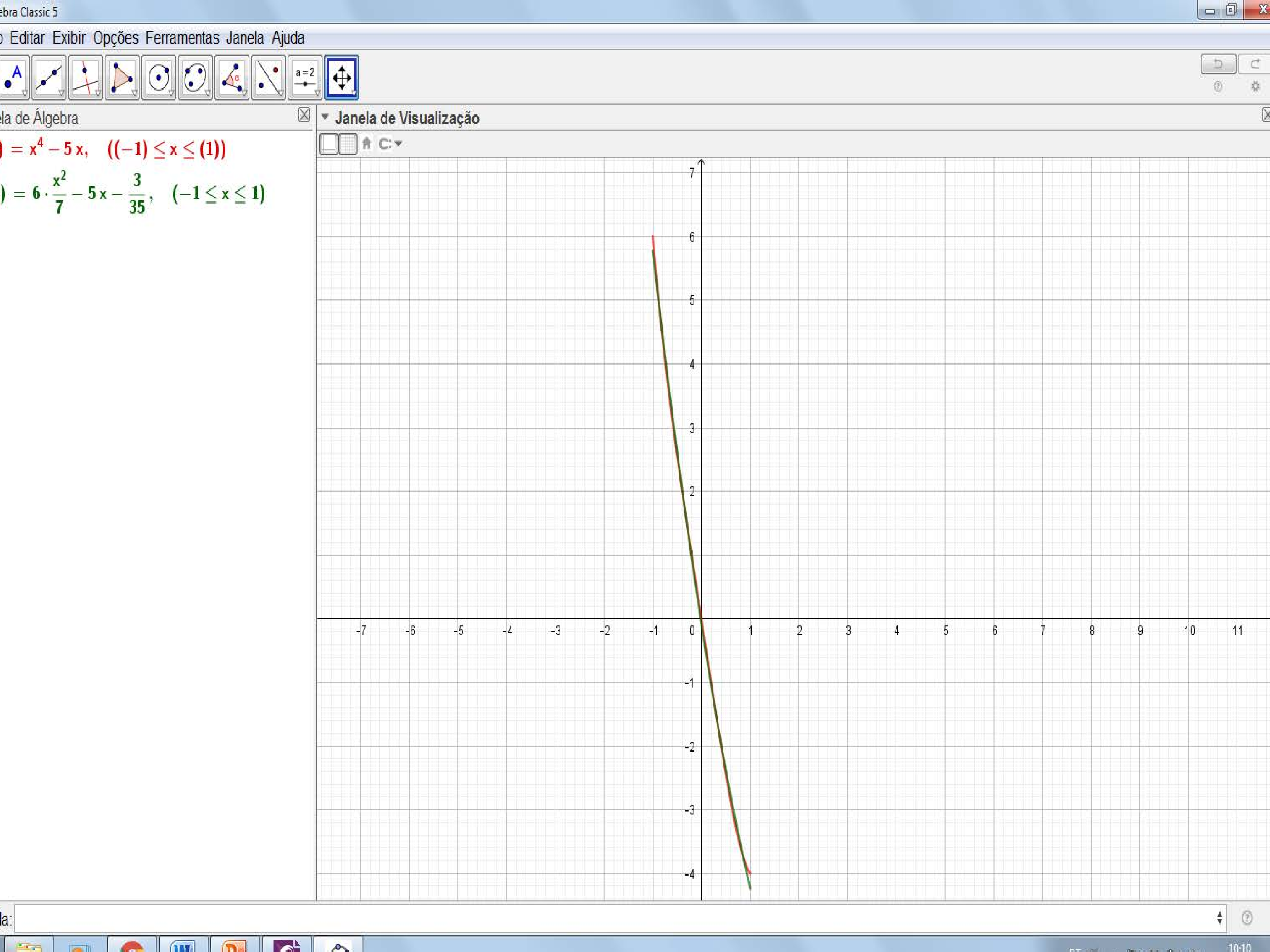
$$b_2 = \int_{-1}^{1} x(x^4 - 5x)dx = \int_{-1}^{1} (x^5 - 5x^2)dx = \left(\frac{x^6}{6} - 5\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{6} - \frac{5}{3} - \frac{1}{6} - \frac{5}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$b_3 = \int_{-1}^{1} (x^4 - 5x)dx = \left(\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{5} - \frac{5}{2} + \frac{1}{5} + \frac{5}{2} = \frac{2}{5}.$$

$$\begin{cases} \frac{2}{5}a + 0b + \frac{2}{3}c & = \frac{2}{7} \\ 0a + \frac{2}{3}b + 0c & = -\frac{10}{3} \\ \frac{2}{3}a + 0b + 2c & = \frac{2}{5} \end{cases}$$

- O que implica *a = 6/7, b = -5* e *c = -3/35*

- $F(x) = \frac{6}{7}x^2 - 5x - \frac{3}{35}$


ebra Classic 5
o Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
a=2
la de Álgebra
) = x^4 − 5 x, ((−1) ≤ x ≤ (1))
) = 6 · x^2/7 − 5 x − 3/35, (−1 ≤ x ≤ 1)
Janela de Visualização
7
6
5
4
3
2
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
-1
-2
-3
-4
la:

Aproximação Trigonométrica

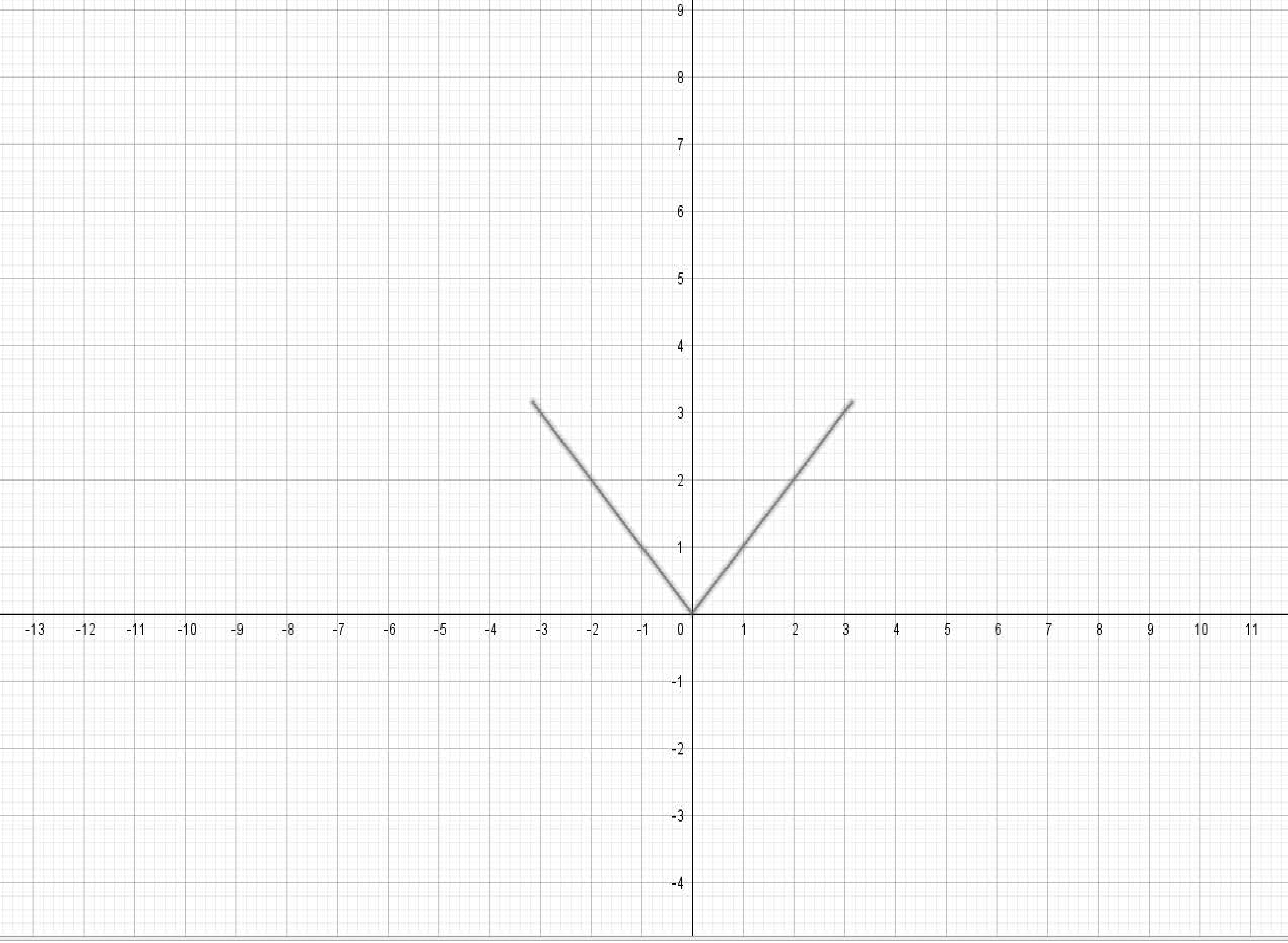
- Consideremos uma função periódica e integrável no intervalo $[0, 2\pi]$. Desejamos aproximar essa função por uma função do tipo:
- $F(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 sen(x) + \cdots + a_m \cos(mx) + b_m sen(mx)$.

Neste Caso

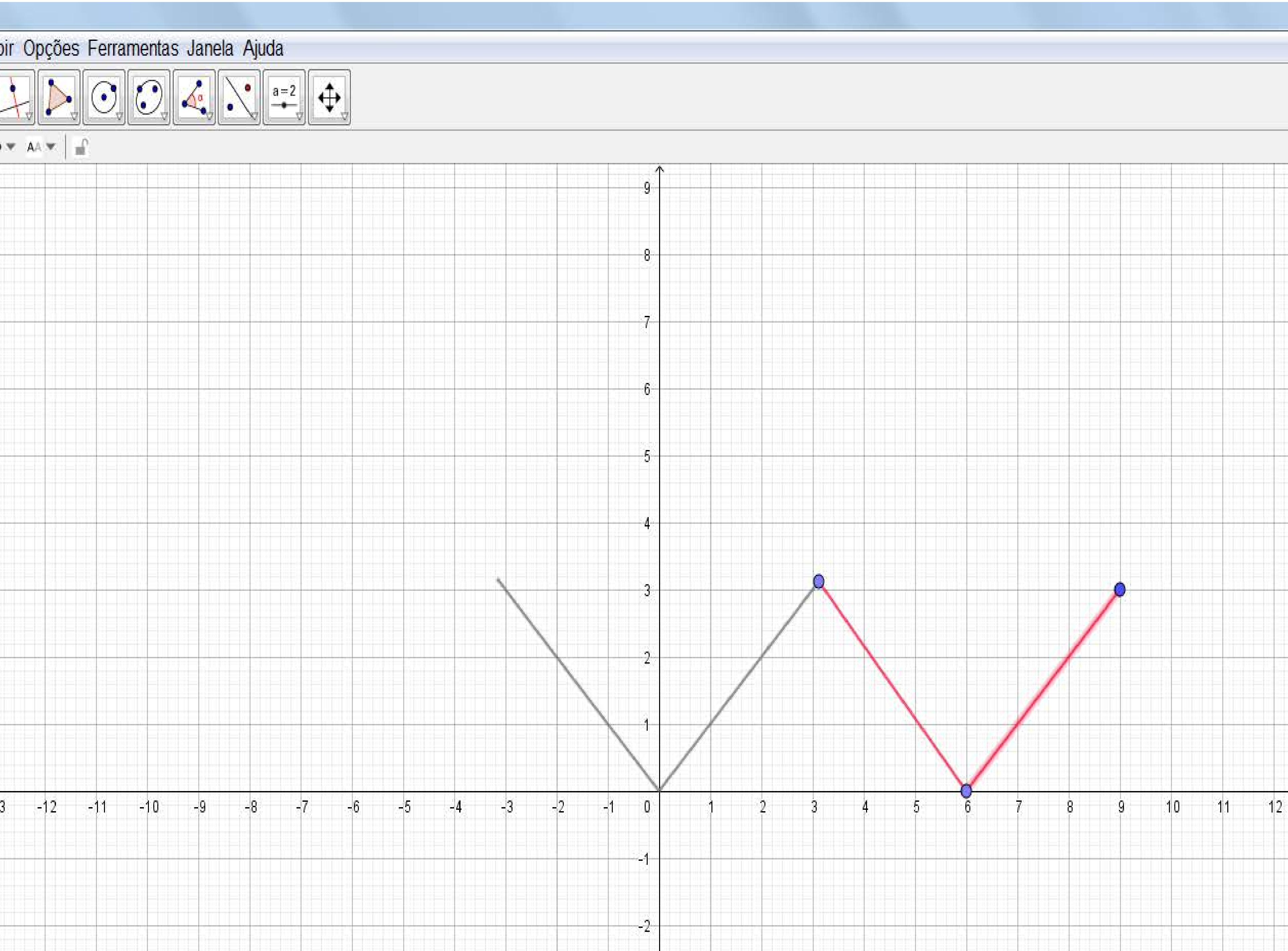
$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx,\ \ k = 1, 2, \ldots, m, \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\ sen(kx)dx,\ \ k = 1, 2, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Use uma aproximação trigonométrica de ordem 1 para a função:
- $f(x) = |x|,\ -\pi < x < \pi$



9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11



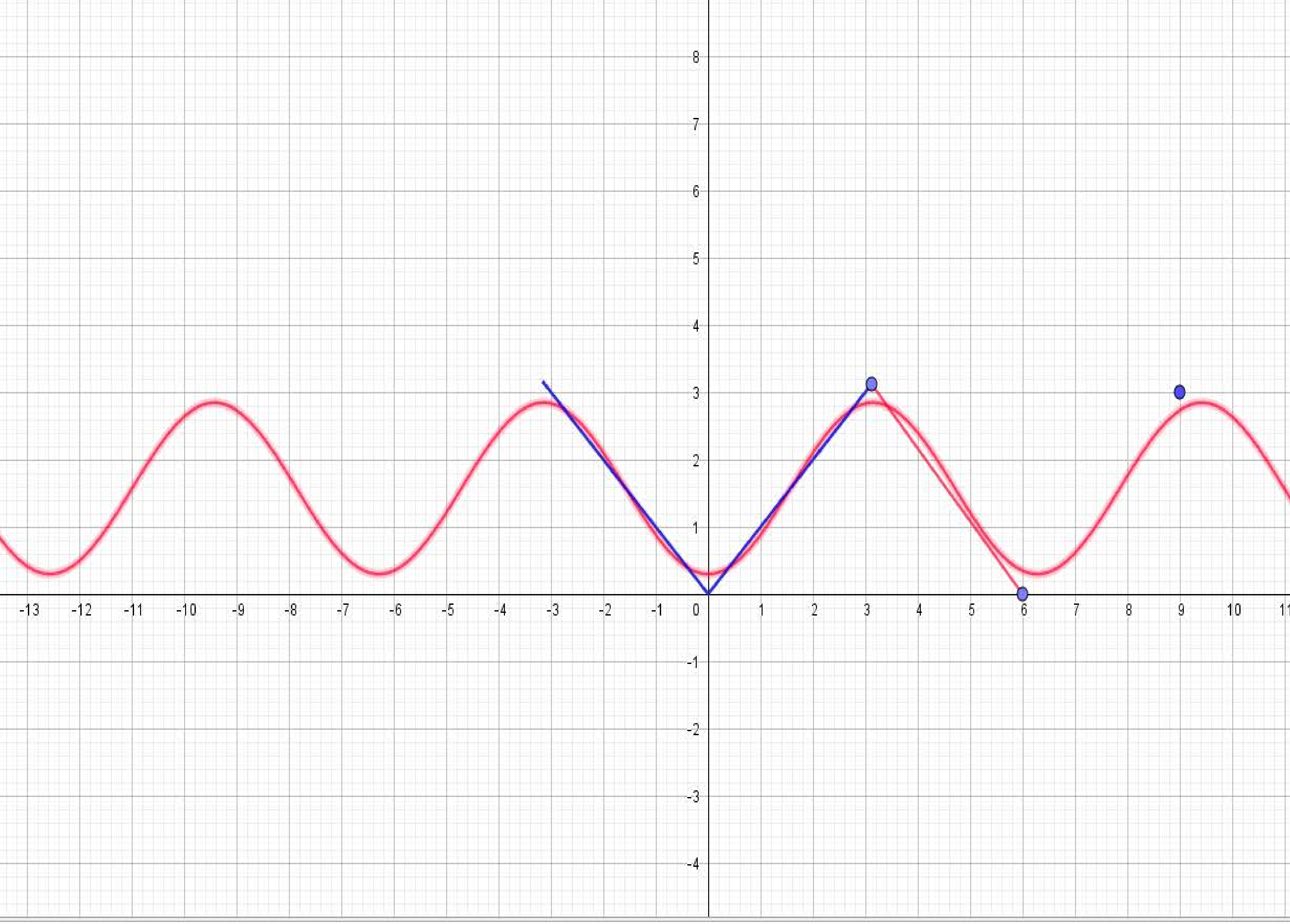
bir Opções Ferramentas Janela Ajuda
a = 2
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
3 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Neste Caso

- $F(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 sen(x)$

- $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{\pi}{2}$
- $a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xcos(x)dx = -\frac{4}{\pi}$
- $b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)se\,n(x)\,dx = 0$

- $F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(x)$


8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10