Cálculo 2

Técnicas de Integração

Frações Parciais

- Ideal para ser resolver integrais do tipo
- $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ onde p e q são polinômios.
- Mas não de todos!!!
- $\int \frac{x^2}{3x^3-4} dx =?$
- $\int_1^2 \frac{x^4-x^3+x}{x} dx =?$

Decomposição de Polinômios

- Como decompor os polinômios:
- $x^2 - 1; \qquad x^3 + 2x^2 - x - 2$?
- E polinômios de graus maiores?

Teorema

- Dado uma função racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ é possível escrevê-la como uma soma de expressões do tipo $\frac{A}{(ax+b)^n}$ ou $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$

Diretrizes

1 Se o grau de $f(x)$ não é inferior ao grau de $g(x)$, use a divisão para chegar à forma adequada.

2 Expresse $g(x)$ como o produto de fatores lineares $ax + b$ ou fatores quadráticos irredutíveis da forma $ax^2 + bx + c$, e agrupe os fatores repetidos de modo que $g(x)$ seja o produto de fatores *diferentes* da forma $(ax + b)^n$ ou $(ax^2 + bx + c)^n$ para n inteiro não-negativo.

3 Aplique as seguintes regras:

Regra a Para cada fator $(ax + b)^n$ com $n \geq 1$, a decomposição em frações parciais contém uma soma de n frações parciais da forma

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}$$

onde cada numerador A_k é um número real.

Regra b Para cada fator $(ax^2 + bx + c)^n$ com $n \geq 1$ e com $ax^2 + bx + c$ irredutível, a decomposição em frações parciais contém uma soma de n frações parciais da forma

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \ldots + \frac{A_n x + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

onde cada A_k e B_k é um número real.

Exemplos

- $\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} dx$
  - Primeiro, vejamos que
  - $\frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}$
  - Encontrando valores para A = 3, B = -1 e C = 2. Teremos
  - $\frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} = \frac{3}{x} + \frac{-1}{x+3} + \frac{2}{x-1}$
  - Ou...
  - $\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} dx = \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{-1}{x+3} dx + \int \frac{2}{x-1} dx =$
  - $3\ln|x| - \ln|x+3| + 2\ln|x-1| + k$

- $\int \frac{3x^3-18x^2+20x-4}{(x+1)(x-2)^3}\,dx = ?$

- Primeiro, temos:
- $\frac{3x^3-18x^2+20x-4}{(x+1)(x-2)^3} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x-2)} + \frac{-3}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^3}$

- Logo,
- $\int \frac{3x^3-18x^2+20x-4}{(x+1)(x-2)^3}\,dx = 2\ln|x+1| + \ln|x-2| + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + K$

- $\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}\,dx$

- Primeiro, vejamos que
- $\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4} = \frac{3x+1}{x^2+4} + \frac{-5}{2x-1}$,

- Portanto,

- $\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{5}{2}\ln|2x-1| + K$